אופרטורים/מטריצות חיוביים

# הגדרה

1. יהי V, , צ"ע נקרא חיובי לחלוטין אם לכל
2. , , ו לכל אזי A נקראת חיובית לחלוטין.

## הערה

1. P חיובי לחלוטין אם ורק אם מגדיר מכפלה פנימית בV  
   A חיובית לחלוטין אם ורק אם מגדיר מכפלה פנימית ב
2. P חיובי אם P צ"ע ו לכל .  
   A חיובית אם A צ"ע ו לכל

# דוגמאות

יהי אופרטור. נתבונן ב. Q חיובי:

1. צ"ע:
2. חיוביות:

וQ חיובי לחלוטין אם(ורק אם) T לא סינגולרי.

הערה: אותו דבר אפשר לעשות גם למטריצות.

אם חיובית לחלוטין אזי זה מגדיר מכפלה פנימית ב:

A היא מטריצת Gram של ביחס לבסיס הסטנדרטי ב

# משפט

יהיו V, , צ"ע. התנאים הבאים הם שקולים:

1. P חיובי לחלוטין(כלומר לכל )
2. קיים אופרטור לא סינגולרי כך ש(וגם להפך: כל אופרטור הוא חיובי לחלוטין)
3. קיים אופרטור צ"ע כך ש
4. כל ע"ע של P הם חיוביים

## הוכחה

כל אופרטור צ"ע ניתן ללכסון בבסיס א"נ וע"ע הם ממשיים (משפט הספקראטלי על אופרטורים צ"ע)  
3) ⇦ 2) עם ⇦   
P צ"ע ⇦ קיים בסיס א"נ ביחס ל כך שהוא עצמי לP עם ע"ע ממשיים  
P חיובי לחלוטין ⇦

נגדיר T ע"ע:   
 ⇦

T צ"ע:  
תרגיל: יהי בסיס א"נ, ו מקיים אזי R צ"ע.

**הוכחנו 1)⇦4). עכשיו נוכיח 4)⇦1):**

P צ"ע ⇦ קיים בסיס א"נ עצמי

# תוצאה(לכסון של שתי מכפלות פנימיות)

יהי V עם , שתי מכפלות פנימיות. קיים בסיס מלכסן שתיהן:  
ו אלכסוניות:

## הערה

אפשר לבחור או אבל לא שתיהן ביחד!)

## הוכחה

נסמן . אזי קיים P צ"ע כך ש  
⇦ קיים בסיס א"נ ביחס ל כך שP אלכסוני.  
⇦ בבסיס הזה שתי מכפלות פנימיות הן אלכסוניות.

# הערה

1. P חיובי ⬄ ⬄ , T צ"ע ⬄
2. ל אופ. צ"ע אומרים אם"ם (חיובי לחלוטין)  
    ( אם"ם )

# משפט(Sylvester)

תהי , . אם ורק אם כאשר

## נוכיח "⇦": ⇦

⇦ מגדירה מכפלה פנימית ב: . נבחר בסיס הסטנדרטי .  
G היא מטריצת Gram של ביחס לB. Gram-Shmidt נותן בסיס א"נ ביחס ל: ומטריצת מעבר משולשת M כך ש .

בפרט:

ויותר כללי:

תבניות בי-לינאריות

יהי V מ"ו. העתקה נקראת תבנית בילינארית אם היא לינארית בכל אחד מהמשתנים:

# דוגמה

היא תבנית בי-לינארית מנוונת

# הגדרה

B נקראת לא מנוונת אם לכל קיים כך ש

# משפט

B לא מנוונת אם ורק אם היא מגדירה איזומורפיזם

## תרגיל

מה הוא ?

# הגדרה

B נקראת סימטרית אם

אנטיסימטרית אם

# דוגמה

*אם ⇦ B סימטרית  
אם ⇦ B אנטיסימטרית  
 ⬄ B לא מנוונת*